

RAMANUCAN ƏDƏDLƏRİ HAQQINDA

M.Q.PƏNAHOV¹, İ.M.YUSUBOV², U.E.KOCAMAZ²¹Bakı Dövlət Universiteti, ²Türkiyə Sakarya Universiteti

Məqalədə Ramanucan ədədləri ilə bağlı dördlüyün elementləri arasındakı bir əlaqə öyrənilərək müəyyən “zəncir” üzərində olan R-ədədlərini əldə etmək üçün tətbiq edilmişdir. Alınan Ramanucan ədədlərinin cədvəli tərtib olunmuş, bu cədvəl fərqli parametrlərə görə təhlil edilərək alınan nəticələrin qrafiki təsviri verilmişdir.

Giriş. Ramanucan və ya Hardi-Ramanucan ədədləri dedikdə əsasən iki natural ədədin küblarının cəmi olaraq iki fərqli şəkildə göstərilə bilən ədədlər başa düşülür. İki kubun cəmi olaraq, üç, dörd və daha çox fərqli şəkildə göstərilə bilən ədədlər də tapıldığından, onlara da uyğun olaraq 3-qat, 4-qat və s. Ramanucan ədədləri kimi adlar verə bilərik. Ən kiçik 2-qat Ramanucan ədədi 1729-dur ki, bunun haqqında da riyazi folklorda “Taksi məsələsi” adlı, həqiqətə oxşar bir hekayə dolaşmaqdadır. Əsas olan odur ki, $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ və 1729-dan kiçik ədədlərin heç biri bu xassəyə malik deyillər. İkinci 2-qat Ramanucan ədədi 4104 olmaqla, $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$. [1, 500] aralığındakı natural ədədlərdən istifadə etməklə yalnız iki dəfə 3-qat Ramanucan ədədi əldə edilə bilər ki, onlar da $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$ və $119824488 = 11^3 + 493^3 = 90^3 + 492^3 = 346^3 + 428^3$ ədədləridir.

Əgər (a, b, c, d) dördlüyü $R = a^3 + d^3 = b^3 + c^3$ və $a < b < c < d$ şərtini ödəyən Ramanucan dördlüyü isə, istənilən κ natural ədədi üçün $(\kappa a, \kappa b, \kappa c, \kappa d)$ dördlüyü də Ramanucan dördlüyü olmaqla $\kappa^3 R$ Ramanucan ədədini verir. Bunları ayırmaq üçün əsli və törəmə Ramanucan ədədləri terminlərini işlədirik. Ramanucan ədədinin əsli olması, uyğun dördlüyün qarşılıqlı sadə olması deməkdir. Qeyd edək ki, bu məqalədə biz yalnız natural ədədlərdən istifadə edirik.

Nəhayət, demək lazımdır ki, bütün bu tədqiqatların təməlinə, $x^3 + y^3 = z^3$ Diofant tənliyinin tam ədədlər çoxluğunda həllinin olmayacağı haqqındakı məşhur Ferma fərziyyəsi, bir başqa adıyla Fermanın Böyük Teoremi durmaqdadır. Bilindiyi kimi bu fərziyyənin doğruluğu 1990-cı illərdə Andre Uayls tərəfindən isbat edildi. Ramanucan ədədləri Hardi-Ramanucan tənliyi deyəcəyimiz $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$ tənliyinin tam ədəd-

lər çoxluğundakı (x_0, y_0, z_0, w_0) həllinə bağlı olaraq $R_0 = x_0^3 + y_0^3 = z_0^3 + w_0^3$ kimi tapılan ədədlərdir.

Ramanucan dördlüyündə olan bir əlaqə haqqında

Əvvəlcə Ramanucan dördlüyündə olan bir əlaqəni və onun tətbiqini göstərmək məqsədilə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. x, y, k, l natural ədədlər olduqda

$$x^3 - y^3 = 6l \Leftrightarrow x - y = 6k \quad (k \in N) \quad (1)$$

ikiqat implikasiyası doğrudur.

İsbatı. Sağdan sola implikasiya aşkar olduğundan, soldan sağa implikasiyanın doğru olduğunu göstərək. $x > y$ şərtində, $xy(x - y) = 2p$ cüt ədəd olduğundan, (1)-in sol tərəfini də nəzərə alsaq

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = 6l - 3 \cdot 2p = 6(l - p) = 6q, \quad q \in N \quad (2)$$

olduğunu görürük. Digər tərəfdən kubu 6-ya bölünən ədədin özü də 6-ya bölündüyündən $x - y = 6k$, $k \in N$ və lemmanın isbatı tamamlanmış olur.

Teorem 4. $m < n < a < b$ (*) şərtini ödəyən natural ədədlər üçün, $m^3 + b^3 = n^3 + a^3$ (**) isə,

$$(n - m) - (b - a) = 6k \quad (k \in N). \quad (3)$$

İsbatı. (**) -dan

$$n^3 - m^3 = b^3 - a^3. \quad (4)$$

və ya

$$(n - m)^3 + 3mn(n - m) = (b - a)^3 + 3ab(b - a)$$

olduğunu əldə edirik. Buradan

$$(n - m)^3 - (b - a)^3 = 3[ab(b - a) - mn(n - m)]. \quad (5)$$

İndi, (4)-ə görə

$$(n - m)(n^2 + mn + n^2) = (b - a)(a^2 + ab + b^2) \quad (6)$$

və (*) şərtinə görə

$$n^2 + mn + n^2 < a^2 + ab + b^2$$

olduğundan, (6)-ya görə

$$n - m > b - a \Rightarrow (n - m)^3 > (b - a)^3$$

olmağa məcburdur ki, buradan da (5)-ə görə

$$ab(b - a) - mn(n - m) > 0$$

olur. Digər tərəfdən ixtiyari x, y natural ədədləri üçün $xy(x-y)$ -in cüt ədəd olduğu aşkardır ki, buradan da

$$ab(b-a) - mn(n-m) = 2l \quad (l \in N)$$

və nəhayət, (5)-dən

$$(n-m)^3 - (b-a)^3 = 6l \quad (l \in N) \quad (7)$$

olduğu tapılır və yuxarıdakı lemma isbatı tamamlayır.

Nəticə. Teoremə görə

$$n-m = (b-a) + 6l > 6l \quad (l \in N),$$

yəni $n-m$ fərqi 7-dən kiçik deyil.

Tətbiq. $(n-m) - (b-a) = 6$ şərtini ödəyən Ramanucan dördlülərini tapmağa çalışaq. $n-m=7$ qəbul etsək, $b-a=1$ olar. Buna görə $m^3 + b^3 = n^3 + a^3$ və ya

$$(n-m)^3 + 3mn(n-m) = (b-a)^3 + 3ab(b-a)$$

bərabərliyinin ödənməsi üçün

$$7^3 + 21m(m+7) = 1 + 3a(a+1) \Rightarrow 342 + 21m(m+7) = 3a(a+1) \Rightarrow$$

$114 + 7m(m+7) = a(a+1) \Rightarrow a^2 + a - [114 + 7m(m+7)] = 0$ kvadrat tənliyinin ödənməsi lazımdır. Bu tənliyin diskriminantı

$D(m) = 1 + 4[114 + 7m(m+7)] = 457 + 28m(m+7)$ tək ədədin kvadratı olduqda,

$n = m + 7$, $a = (-1 + \sqrt{D(m)})/2$, $b = a + 1$ olaraq tapılır və bunlar bu şərti ödəyən Ramanucan dördlülərinin bir "zəncirini" törədir. Bunlara uyğun olan ədədlər də Ramanucan ədədlərinin bir "zəncirini" əmələ gətirir. Bu düsturun və kompyuterin köməyiylə aşağıdakı 11 dənə Ramanucan ədədi əldə olunmuşdur:

m	$D(m)$	$\sqrt{D(m)}$	R -dördlüyü	R -ədədi
2	961	31	(2, 9, 15, 16)	4104
9	4489	67	(9, 16, 33, 34)	40033
17	11881	109	(17, 24, 54, 55)	71288
42	58081	241	(42, 49, 120, 121)	1845649
87	229441	479	(87, 94, 239, 240)	14482503
197	1125721	1061	(197, 204, 530, 531)	157366664
324	3003289	1733	(324, 331, 866, 867)	685 726587
722	14737921	3839	(722, 729, 1919, 1920)	7454255048
1439	58262689	7633	(1439, 1446, 3816, 3817)	58591507032
3192	285914281	16909	(3192, 3199, 8454, 8455)	636945650263
5216	762809161	27619	(5216, 5223, 13809, 13810)	2775699258696

Analoji olaraq $n - m = 33$ -ə qədər mümkün olan bütün zəncirlər əldə olunmuşdur. Təbii olaraq diskriminantın tam kvadrat olamadığı hallarda zəncirlərin halqalar çoxluğu boş olmuşdur. Misal üçün $n-m=30$ halında, $D(m) = 5232 + 20m(m+30)$ olmaqla, son rəqəmi 2 olduğuna görə tam kvadrat deyil və uyğun zəncirin halqası yoxdur.

[1, 500] parçasındaki natural ədədlərin dördlüləri ilə əlaqədar Ramanujan(R) ədədlərinin fərqli parametrlərə görə öyrənilməsi

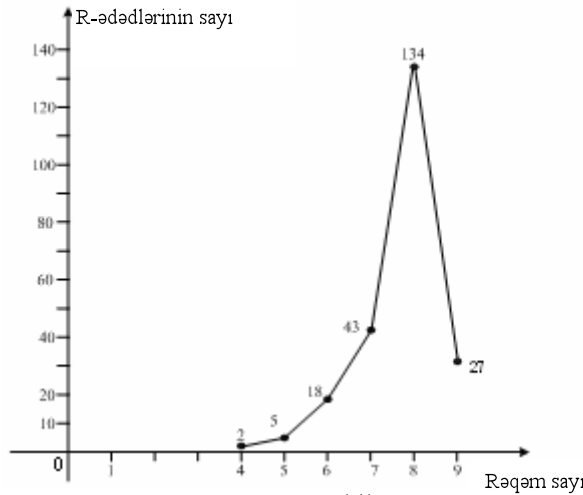
Kompyuterin köməyi ilə [1, 500] parçasındaki natural ədədlərdən istifadə olunmaqla 565 dənə R- ədədi tapılır ki, bunlardan da 4 dənəsi təkrarlanandır. Təkrarlanma bu çoxluqda 2 dənə 3-qat R-ədədi olması ilə əlaqədardır.

Nəticədə, bu aralıqdakı ədədlərdən əldə olunan fərqli R-ədədlərinin sayı 561 olur. Ancaq bu ədədlərdən bəziləri digər ədədlərin κ^3 misilləri olmaqla törəmə R-ədədləridirlər və bunlara uyğun olan dördlülər də qarşılıqlı sadə deyillər. Əldə olunan sadə R-ədədlərinin sayı 229-dur və analiz üçün onlar əsas götürülmüşdür.

Sadə Ramanujan ədədlərinin təhlili nəticələri (qrafik olaraq)

[1, 500] aralığındakı natural ədədlərin vasitəsilə əldə olunan sadə R-ədədləri cədvəlinin təhlili nəticəsində aşağıdakı qanunauyğunluqlar müşahidə olunmuşdur:

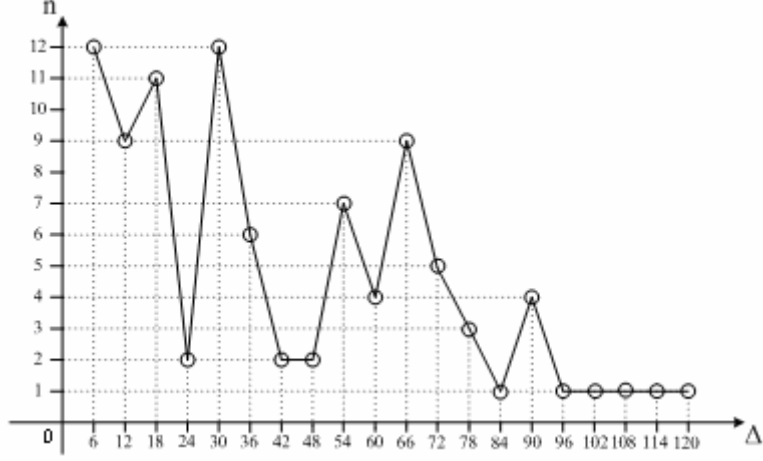
Ən çox olaraq 8 rəqəmli R-ədədləri(134 dənə) tapılmışdır ki, bu da [1, n] aralığına bağlı R-ədədlərinin maksimum sayına uyğun rəqəm sayı üçün $m_0(n) = [\sqrt[3]{n}] + 1$ düsturunun doğru ola biləcəyi fərziyyəsinə yol açmışdır. Burada $[a]$ ilə a -nın tam hissəsi işarə olunmuşdur. Beləliklə, m rəqəmli sadə R-ədədlərinin sayını $S_R(m)$ -lə işarə etsək, bu funksiya $[4, m_0]$ aralığında artan, sonra isə azalandır. Artma təcridi, azalma isə ani olur. Bundan başqa $7^3 = 343 = 500 - 157$ və $9^3 = 729 = 500 + 229$ olduğundan, yəni 7^3 ədədi 500-ə daha yaxın olduğundan $S_R(7) > S_R(9)$ olması təbiidir (şəkil 1).



Şəkil 1.

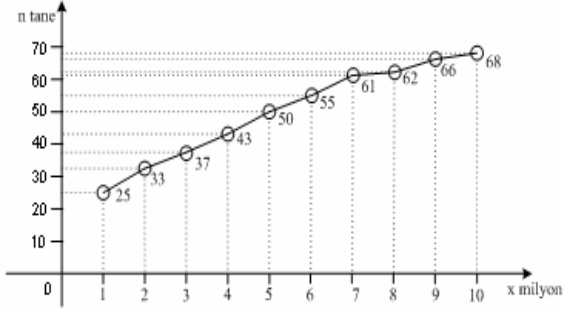
İkinci araşdırma isə [1, 250] aralığına uyğun R-ədədlərinin $\Delta = (n - m) - (b - a) = 6l$ ($l \in N$) fərqiə görə paylanması ilə əlaqədardır.

Uyğun funksiyanın qrafiki şəkil 2-də göstərilmişdir. Qrafikdən də görü-ndüyü kimi maksimum nöqtələri əsasən $\Delta_k = 6(2k+1)$ nöqtələrinə uyğun gəlir. Ən böyük qiymət olan 12 isə iki nöqtədə, $\Delta_0 = 6$ və $\Delta_2 = 30$ nöq-tələrində alınır.

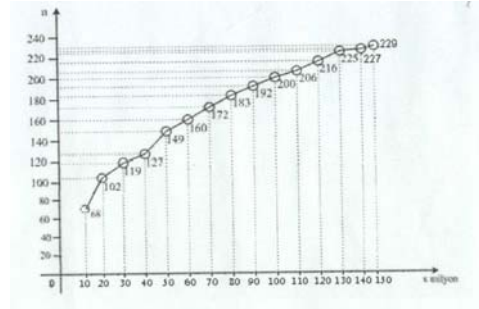


Şəkil 2.

Son olaraq $[1, 250]$ aralığı ilə bağlı və x -i aşmayan R -ədədlərinin sayını göstərən $n(x) = S\{R : R \leq x\}$ funksiyanın qrafiki verilmişdir. Bu-rada R , Ramanujan ədədini, $S(A)$ isə A çoxluğunun element sayını gös-tərir. Bu grafik 10^6 addımla $[1, 10^7]$ aralığında və 10^7 addımla $[10^7, 15 \cdot 10^7]$ aralığında olmaqla, iki fərqli miqyasla verilmişdir (şəkil 3 və şəkil 4).



Şəkil 3.



Şəkil 4.

ƏDƏBİYYAT

1. Andrews G.E. An introduction to Ramanujan's "lost" notebook, Amer. Math. Monthly 86(1979), p.89-108.
2. Berndt B.C., R.A.Rankin. Ramanujan: Letters and Commentary, Providence Rhode, Island, 1995, 260 p.
3. Bruce C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part 1- Part 4, Springer Verlag,1985, 320 p.
4. Hardy G.H. Sirinivasa Ramanujan, Proc. London Math. Soc. 19(1921), XI-XVIII, p.14-17.
5. Rankin R.A. Ramanujan manuscripts and notebooks 2, Bull. London Math. Soc. 21(1989), 351-365.
6. Yusubov İ.M. Hayranlık duyduğumuz bir matematikçi: Ramanujan, Bilim ve Ütopya, Haziran, 2003, s.36-41.

О ЧИСЛАХ РАМАНУДЖАНА

М.Г.ПАНАХОВ, И.М.ЮСУБОВ, У.Е.КОДЖАМАЗ

РЕЗЮМЕ

В работе изучается связь между элементами Рамануджанской четверки с целью получения R-чисел, находящихся на определенной «цепи». Получена таблица Рамануджанских чисел, которая исследуется по различным параметрам, а полученные результаты графически изображаются.

ON THE RAMANUJAN NUMBERS

M.G.PANAHOV, I.M.YUSUBOV, U.E.KOJAMAZ

SUMMARY

This paper studies the Ramanujan numbers and the elements of four to gain R – numbers on a certain chain. As a result, the obtained table of Ramanujan numbers is studied according to the different parameters and the outcome is prencented graphically.